ARTÍCULO DE REFLEXIÓN

UNA INTRODUCCIÓN CONCEPTUAL A LA TEORÍA DE CONTRACCIÓN

A CONCEPTUAL INTRODUCTION TO CONTRACTION THEORY

Jorge Mario Zamora Vélez[1], Francisco Javier Ibargüen Ocampo[2]

1 Investigador Externo Asociado de GAMA, Grupo de Investigación en Automatización y Máquinas de Aprendizaje (GAMA) Universidad del Quindío. jorgemariozv@gmail.com.

2 Director del Grupo de Investigación GAMA, Grupo de Investigación en Automatización y Máquinas de Aprendizaje (GAMA) Universidad del Quindío. fjibarguen@uniquindio.edu.co.

Recibido: Marzo 5 de 2012
Aceptado: Mayo 15 de 2012

*Correspondencia del autor. Programa de Ingeniería Electrónica, Universidad del Quindío, Carrera 15 Calle 12 Norte, Armenia, Quindío, Colombia. fjibarguen@uniquindio.edu.co.

RESUMEN

La Teoría de Contracción es una herramienta metodológica relativamente nueva empleada para el estudio de la estabilidad en los sistemas dinámicos no lineales. Debido a su considerable complejidad matemática, esta teoría puede llegar a ser algo difícil de comprender, especialmente en el caso de estudiantes o profesionales no inmersos en el campo de la geometría diferencial y el control no lineal. A fin de hacer la teoría más accesible, este artículo presenta una discusión simplificada de los elementos motivacionales que dan origen a la misma. Con ello, se pretende que el lector adquiera un sólido entendimiento de la naturaleza de la teoría de Contracción, así como del concepto de la Estabilidad Incremental, noción que da origen a esta primera, con el objetivo de que logre una adecuada introducción al tema y pueda aplicarlo correctamente en estudios posteriores relacionados.

Palabras-clave: Teoría/Análisis de Contracción, Estabilidad Diferencial, Estabilidad Incremental, Sistemas Convergentes, Análisis de Estabilidad, Sistemas No Lineales, Control No Lineal.

ABSTRACT

The Contraction Theory is a relatively new methodology used to study of the stability of nonlinear dynamical systems. Because of its relative mathematical complexity, this theory could be a difficult thing to understand, especially for students and professionals not involved in the field of the differential geometry and nonlinear control theory. In order to make the Contraction Theory easier to introduce, this paper presents a simplified discussion of the motivational elements which give rise to the theory. Thus, it is intended the reader gains a solid understanding of nature of the contraction as well as the incremental stability, so as to he/she gets a suitable introduction to the subject and he/she can properly apply it into related subsequent studies.

Key words: Contraction Theory/Analysis, Differential Stability, Incremental Stability, Convergent Systems, Stability Analysis, Nonlinear Control.

INTRODUCCIÓN

Entre las conductas más destacadas dentro del tratamiento de los sistemas dinámicos se encuentran las concernientes a la *Estabilidad*; una propiedad sumamente importante, entendida como una característica de afinidad y buen comportamiento, en donde el estado del sistema alcanza alguna condición de invariancia dinámica perdurable, dotándolo de consistencia y regularidad en su forma o actuar. Estas propiedades además de ser muy significativas, son considerablemente muy deseables y por tanto de gran interés de estudio dentro de todos los campos de las ciencias e ingenierías.

Hasta el día de hoy, el problema de la estabilidad ha sido relativamente tratado con éxito a través del empleo de la *Teoría de Lyapunov* (1-3); propuesta a finales del siglo XIX y denominada así en honor a su autor. Aunque su metodología puede ser justificada por varias razones matemáticas y físicas (véase por ejemplo (4) pág. 19-20), la versión más coherente y por tanto aceptada, es la que describe esta propiedad como una particularidad derivada de un fenómeno energético (3); un razonamiento muy acorde a los principios y leyes fundamentales de la física. Básicamente, la metodología de Lyapunov afirma que la estabilidad de un sistema dinámico se haya inherentemente atada a su evolución energética, y que esta puede ser indirectamente reflejada a través de una cuasi-función escalar de energía denominada *de Lyapunov.*

Si bien esta propuesta ha sido extremadamente provechosa para el estudio de problemas de estabilidad, aún cuenta con algunos vacíos conceptuales y matemáticos que no explican ciertos procedimientos analíticos, y que al tiempo generan algunas dificultades de procedimiento y aplicabilidad asociadas fundamentalmente a su falta de sistematicidad, determinismo y generalidad (vea (5) para una discusión profunda).

Con el fin de generalizar el tratamiento de la estabilidad y subsanar estas carencias prácticas de la teoría de Lyapunov, surge una nueva propuesta inspirada de la mecánica de fluidos y estructurada a partir de elementos de la geometría diferencial, denominada *Teoría o Análisis de Contracción* (6, 7). Esta herramienta relativamente nueva, estudia la convergencia entre trayectorias en los sistemas dinámicos sobre el espacio de estados, y abstrae esta idea a la de un campo de flujo actuando dentro de un espacio fluido. Bajo este marco de trabajo, el concepto de estabilidad sufre una redefinición, ya que la estabilidad no necesariamente está ligada a un punto de equilibrio o movimiento nominal, sino que se asocia a la independencia del comportamiento del sistema con respecto a sus condiciones iniciales. Tal forma de estabilidad es conocida como *Estabilidad Incremental* (8-10).

Puesto que en principio la teoría de Contracción puede aparentar ser relativamente compleja debido a su notable carga matemática –principalmente en comparación a la encontrada en Lyapunov– y debido a la gran importancia que representa la incursión de una nueva teoría –en particular ésta–, para el tratamiento de la estabilidad, el presente artículo propone una breve aunque muy clara introducción conceptual a los fundamentos motivacionales de esta teoría, con el objetivo de brindar cimientos sólidos que permitan un entendimiento claro de su naturaleza y faciliten estudios posteriores relacionados de mayor profundidad.

Considere para la discusión y por el bien de la simplicidad, sistemas determinísticos continuamente diferenciables, cuya representación matemática está dada por el conjunto general de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) de la forma

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \qquad (1)$$

donde $t \in [0,\infty)$ es el tiempo, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de trayectorias de estado, con el par (t_0, x_0) como las condiciones iniciales de una solución particular arbitraria del sistema, y $\mathbf{f}(\cdot,\cdot)$ como un mapeo vectorial continuo, diferenciable y uniforme (Lipschitz) tal que $\mathbf{f}:[0,\infty)\times D\rightarrow \mathbb{R}^n$ con $D \subset \mathbb{R}^n$ como un subconjunto que contienen el origen como punto de equilibrio $\boldsymbol{x}_e$, y tal que ambos verifican que $\mathbf{f}(\mathbf{t}, \boldsymbol{x}_e) \equiv 0,\ \forall t \geq 0$.

Inicialmente en la sección II se ofrece un razonamiento de la motivación física que da origen a la teoría de contracción, justificando plenamente su uso en el tratamiento de la estabilidad. Posteriormente en la sección III se introduce formalmente al concepto de estabilidad incremental y a sus ventajas analíticas, para después, en la sección IV, ilustrar el marco geométrico que describe esta situación incremental de trayectorias, físicamente vista como un estudio cinemático del flujo local. A continuación en la sección V, se presenta el análisis de convergencia entre trayectorias, el cual brinda la metodología básica para el estudio formal de la estabilidad, y el cual representa, el resultado fundamental ya conocido de la contracción, que por razones de congruencia y para mantener una línea coherente en el desarrollo del presente artículo, señalamos solamente hasta este punto. La discusión finaliza en la sección VI con algunas reflexiones y observaciones acerca de lo expuesto.

I. HACIA UNA NUEVA PERSPECTIVA MOTIVACIONAL

A diferencia de la teoría de Lyapunov que se basa en la evolución energética del sistema, la teoría de contracción es desarrollada coherentemente desde una perspectiva menos general pero igualmente intuitiva motivada de la dinámica de fluidos (11, 12), la cual ofrece una visión del comportamiento de los entes dinámicos como si fuesen partículas inmersas dentro de un fluido.

Para ver esto con más claridad, asuma el modelo clásico de un fluido, compresible y laminar, compuesto de un número infinito de partículas, cuya velocidad y aceleración es dependiente de su posición y del tiempo, y que en consecuencia ignora la teoría cinética de fluidos que ordena un movimiento aleatorio de sus moléculas (13). Desde esta perspectiva, el sistema dinámico general en (1) es asociado físicamente a un flujo de régimen transitorio (o no-estacionario) n-dimensional dentro de este fluido, donde $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ representa la velocidad vectorial del flujo en la posición espacial n-dimensional $\boldsymbol{x}(t)$ en el instante de tiempo t. En tal caso, la solución particular del sistema $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{x}_0)$ describe una línea de flujo trazada por una partícula ξ inicialmente etiquetada por su condición inicial $\boldsymbol{x}_0$ en el medio fluido (Fig. 1).

Dentro de este contexto, la idea de estabilidad es entendida de manera diferente a como se hace convencionalmente. En este caso, el interés se enfoca sobre el comportamiento global del flujo, que es el que describe la dinámica general del fluido y no simplemente al movimiento de una única línea. Poco o ningún sentido tiene en la mecánica de fluidos, estudiar con detalle la trayectoria de una partícula individual la cual no brinda información acerca de la conducta de sus compañeras o del flujo en general que es el que termina siendo el elemento de interés. El concepto de estabilidad se haya ahora totalmente ajena a cualquier movimiento, trayectoria o punto nominal como es acostumbrado puesto que en principio no hay una única línea de flujo (límite o referencial) sobre la cual pueda definirse la dinámica de grupo. La estabilidad se reduce entonces a una propiedad intrínseca del sistema que retrata la independencia de su comportamiento en relación a sus condiciones iniciales, las cuales se dice que son simple y llanamente olvidadas, puesto que la condición de estabilidad es totalmente ajena a éstas. Esta idea se ve más clarificada con la noción de convergencia: *si todas las trayectorias de flujo se acercan progresiva y mutuamente entre sí unas a otras en una región del espacio fluido, e independientemente de su origen o punto de partida dentro del mismo, entonces el flujo se dice convergente, y como consecuencia toda partícula o línea de corriente alcanza un movimiento nominal dado (Fig. 2). En tal sentido, se dice que el sistema es convergente o más formalmente incrementalmente asintóticamente estable (iAS)* (5, 8) *y el espacio de trayectorias se "contrae".*

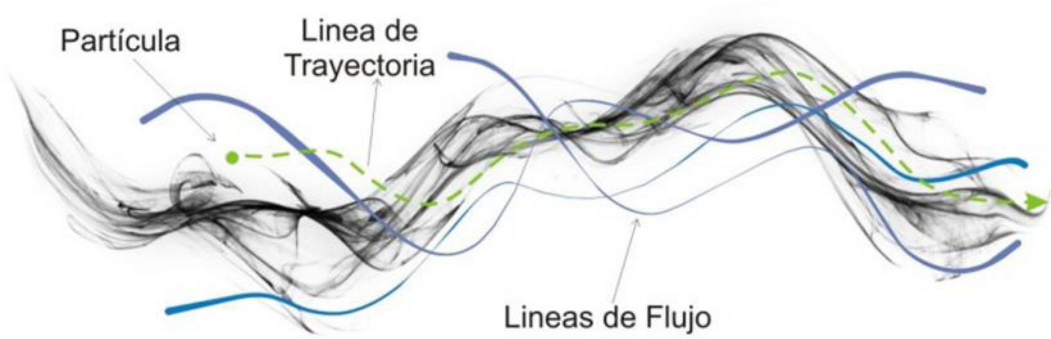

Figura 1. Flujo de Partículas en un Fluido.

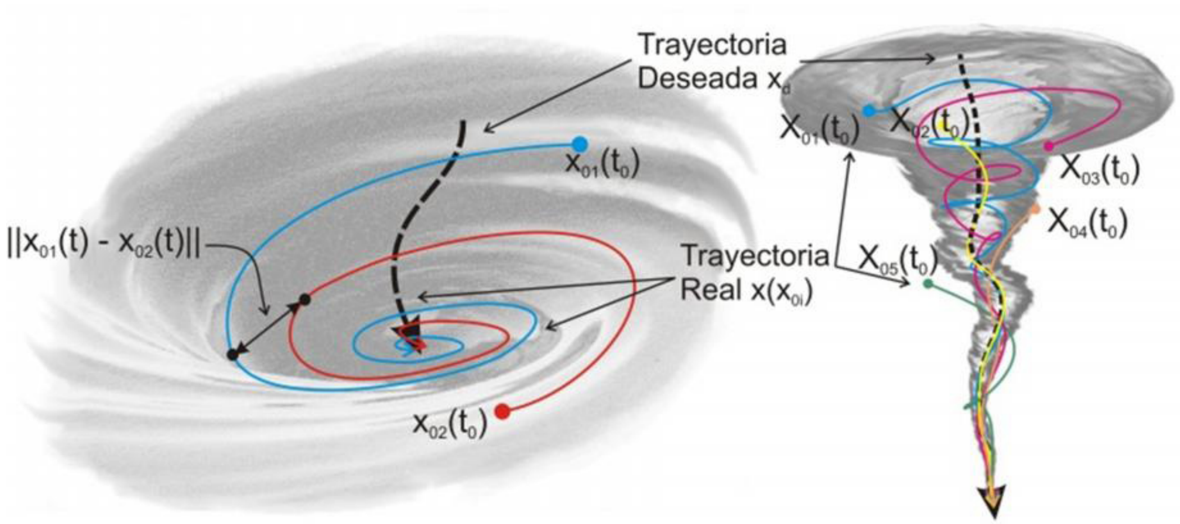

Figura 2. Flujo Convergente

Por supuesto, nótese que si se aplica un razonamiento similar, con la noción de divergencia, puede determinarse la expansión del espacio de trayectorias, y por lo tanto, coherente con una noción de inestabilidad incremental (11).

II. HACIA UNA FORMA DE ESTABILIDAD INCREMENTAL

Convencionalmente durante el proceso de diseño de estabilidad, en el caso de la ingeniería de control, se comienza por garantizar la existencia de una solución específica previamente determinada, para posteriormente verificar y/o asegurar su buen comportamiento. Si por algún motivo la solución varía de la inicialmente pactada a través de un cambio en su condición inicial, debe asegurarse reiteradamente la estabilidad de la nueva solución, involucrando así un nuevo proceso analítico de diseño puesto que la dinámica del sistema podría cambiar extraordinariamente; algo no simplemente molesto para el analista sino sobre todo muy poco conveniente en sistemas dinámicos con alto grado de incidencia, incertidumbre y sensibilidad dinámica, de ignición variable, con alto riesgo de pérdida, y entornos altamente variables y perturbados. En la mayoría de los casos el hallazgo de una primera solución particular puede representar una ardua tarea.

Una propuesta alterna que evade este problema, es precisamente la de estudiar directamente la estabilidad entre trayectorias, es decir la estabilidad incremental, y garantizar desde el comienzo la estabilidad de todas y cada una de soluciones del sistema; y solo hasta entonces fijar una solución particular dada, de modo que no sea motivo de preocupación las características de estabilidad del sistema que de ante mano serán conocidas.

Tal propuesta resulta de gran interés, debido a que el empleo de la perspectiva incremental puede resultar enorme e increíblemente ventajoso tanto para los resultados de control como para la propia metodología de análisis (6, 7). Estudios en el campo del control lineal robusto demuestran que el uso de normas es altamente efectivo y conveniente en la confrontación de problemas con requerimientos de robustez y sensibilidad (14); además, tales atributos pueden ser exportados al ámbito no lineal al igual que otros requerimientos más estrictos relacionados a propiedades lineales, simplemente adicionando el marco incremental a la ecuación, permitiendo inclusive mantener esta perspectiva lineal de trabajo ((15) (9) y demás referencias halladas en ellos).

Investigaciones posteriores (9, 15-17) corroboran estos señalamientos y afirman específicamente que el uso de normas incrementales permite tomar en cuenta no solo los requisitos no lineales clásicos, relacionados con la capacidad de reducir y rechazar efectos distorsivos de dinámicas no medibles (por ejemplo, incertidumbres no estructuradas o perturbaciones exógenas), sino que también abarcan problemas específicos asociados con la naturaleza lineal y el rendimiento de la planta, tales como condiciones iníciales arbitrarias y comportamientos en estado estacionario.

De esta manera, en vez de evaluar la tendencia de las trayectorias en relación a un único atractor, se analiza la evolución entre pares arbitrarios de trayectorias en una región del espacio, evaluando en general el comportamiento de todas ellas, en busca de alguna clase de conducta de reciprocidad, afinidad o correspondencia mutua, en donde la dinámica de cada una se ve sujeta o dominada por la de las demás. El comportamiento de la estabilidad incremental es entonces caracterizado plenamente desde el punto de vista geométrico analizando la Norma Incremental entre soluciones. Es así como, la estabilidad exponencial incremental puede definirse entonces de la siguiente manera:

Definición 1 (iGUES) (10): *El sistema dinámico (1) se dice Incrementalmente (Globalmente) Exponencialmente Estable (iGUES)* si, existen tres constantes r,k,λ estrictamente positivas tal que

$$\left\|\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{x}_j(t)\right\| \leq k\left\|\boldsymbol{x}_{i0}(t_0)-\boldsymbol{x}_{j0}(t_0)\right\| e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (2)$$

para todo $\boldsymbol{x}_{i0,j0} \in \mathbb{R}^n$ y todo $\forall t,t_0 \geq 0$.

Nótese, que para fines prácticos y por el bien de la simplicidad en esta discusión, solamente es considerada la versión global exponencial (*iGUES*) de la estabilidad incremental, que por extensión es igualmente una forma más robusta de la iAS comentada en la sección anterior (5). Múltiples y diversas formas de estabilidad incremental pueden ser halladas en (4, 5, 8, 9) tanto en el espacio de estados como en el de Lebesgue.

III CINEMÁTICA LOCAL DE FLUJO

Alternativamente, la estabilidad incremental puede ser estudiada diferencialmente, a través de la extensión del marco de la dinámica de fluidos propuesta por la teoría de Contracción (6, 7); lo cual es directa y explícitamente señalado en (4, 5, 10, 18).

El análisis de estabilidad se encauza entonces como un estudio diferencial, dado en relación a micro-flujos o localidades de soluciones vecinas del sistema dinámico en cuestión. Esta tarea es analíticamente llevada a cabo, como un análisis geométrico de la evolución de la distancia entre pares arbitrarios de trayectorias –infinitesimalmente– vecinas dentro de una región del espacio, lo cual se logra a través del estudio de la dinámica local *exacta* que fija el comportamiento entre soluciones del sistema dinámico, indiferentemente si es o no lineal o variante en el tiempo. Así, si la distancia entre ambas trayectorias disminuye con el tiempo todas las líneas de flujo convergen y el sistema claramente se contrae, si por el contrario las líneas se separan, el sistema entonces se expande. Esto por supuesto conlleva a que las trayectorias convergentes alcancen una trayectoria límite particular, o por el contrario, se alejen de ella.

Para ver esto con más detalle, considere dos partículas

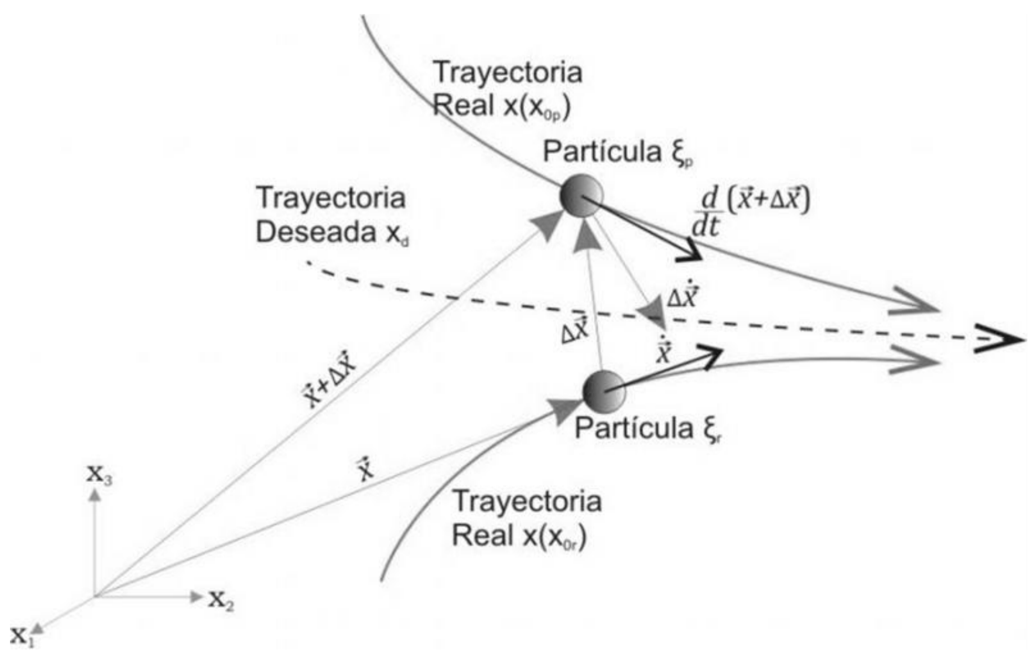

Figura 3. Dinámica Local entre Trayectorias de Partículas

lagrangianas $\xi_{p,r}$ arbitrarias y dentro de un campo de flujo $\mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ en un instante fijo de tiempo t, referenciadas a un sistema rígido de coordenadas cartesianas $\mathbf{OX}_1$ $\mathbf{X}_1$ $\mathbf{X}_3$. La primera transitando sobre la posición $\boldsymbol{x}$, mientras que la segunda se halla a una distancia $\Delta\boldsymbol{x}$ (Fig. 3).

La dinámica que modela la proximidad entre ambas trayectorias dentro del campo de flujo está dada por el incremento $\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ entre las velocidades de campo asociadas a las posiciones $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ sobre las cuales se hallan el par de partículas $\xi_{p,r}$, en ese instante, es decir

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \Delta\mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t),\Delta\boldsymbol{x}(t),t)\\ &:= \mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t)+\Delta\boldsymbol{x}(t),t)-\mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t),t)\end{aligned} \qquad (3)$$

Ya que $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t)+\Delta\boldsymbol{x}(t),t)$ puede expresarse por una expansión en series de Taylor, la proximidad (finita) entre cualesquier dos partículas del medio es dada por

$$\Delta\mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t),\Delta\boldsymbol{x}(t),t) = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t),t)\Delta\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial^2\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t),t)\Delta\boldsymbol{x}^2 + \cdots \quad (4)$$

Si ahora, en un tiempo dado, ambas partículas están lo suficientemente cerca la una de la otra, en una localidad infinitesimalmente pequeña, tal que $\Delta\boldsymbol{x}\rightarrow 0$, los términos no lineales en (4) no solo no son despreciables sino que son completamente nulos y el análisis puede realizarse bajo el marco diferencial, de modo que la dinámica local sea descrita por el variacional del campo de flujo $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t),t)$, definido como

$$\delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \delta\mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t),t) = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t),t)\delta\boldsymbol{x} \quad (5)$$

que define la primera variación del campo vectorial funcional $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t),t)$, con $\boldsymbol{\delta x}$ como un *desplazamiento* (*variacional*) *virtual* (19, 20); estos últimos son ampliamente usados en la mecánica clásica y el control óptimo. La ecuación "*lineal*", denominada de conformidad con el actual contexto como Dinámica Virtual (o Velocidad Virtual) del sistema, describe el comportamiento local "*exacto*" entre cualquier par de trayectorias vecinas (infinitesimalmente próximas) dentro del campo de flujo.

IV. ANÁLISIS BÁSICO DE ESTABILIDAD

A. Estabilidad Incremental

Un análisis estricto de estabilidad incremental puede ser realizado ahora con mayor rigurosidad estudiando la evolución de la distancia entre trayectorias vecinas $\delta\boldsymbol{x}$ por medio de la dinámica virtual en (5).Si se considera inicialmente la distancia local δs entre ambas partículas vecinas como en la Fig. 3, definida matemáticamente a través de la norma euclidiana del desplazamiento virtual δz como

$$\delta s^2 := \delta\boldsymbol{x}^T\delta\boldsymbol{x} = \|\delta\boldsymbol{x}\|^2 \quad (6)$$

la tasa de cambio de esta distancia cuadrática $\delta\mathbf{z}^T\ \delta z$ estará dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{x}^T\delta\boldsymbol{x}) &= 2\delta\boldsymbol{x}^T\mathbf{J}(\boldsymbol{x},t)\delta\boldsymbol{x}\\ &= 2\delta\boldsymbol{x}^T\mathbf{J}_{sym}(\boldsymbol{x},t)\delta\boldsymbol{x}\end{aligned} \qquad (7)$$

con $\mathbf{J}_{sym}$ como la parte simétrica del jacobiano $\mathbf{J} =\partial\mathbf{f}/\partial\boldsymbol{x}$. Resolviendo a través de herramientas del cálculo y el álgebra lineal (ver (2, 3)) se obtiene

$$\|\delta\boldsymbol{x}_0\|e^{\int_{t_0}^{t}\lambda_{min}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau} \leq \|\delta\boldsymbol{x}\| \leq \|\delta\boldsymbol{x}_0\|e^{\int_{t_0}^{t}\lambda_{max}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau} \quad (8)$$

donde $\lambda_{\min}(\boldsymbol{x},t)$ (λ_{max} $(\boldsymbol{x}$,t)) es el máximo (mínimo) autovalor de J_{sym}. Partiendo de esta doble desigualdad, es posible establecer varios criterios de estabilidad (e inestabilidad) basados en la convergencia (divergencia) de trayectorias, simplemente examinando el comportamiento límite de las integrales de los autovalores máximo λ_{max} $(\boldsymbol{x},t)$ (mínimo λ_{min} $(\boldsymbol{x},t)$) en (11) (6, 7, 21). Inicialmente, es fácil de observar en (11) que un sistema es *i*GUES en principio, si es asumido trivialmente si el máximo autovalor λ_{max} $(\boldsymbol{x},t)$ es en todo momento uniformemente estrictamente negativo dentro de una región dada.

De este modo la región es *i*GUES y el espacio de trayectorias se contrae exponencialmente. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 3 (Región de Contracción) (6, 7): Dado el sistema dinámico (1), una región del espacio de estados es llamada Región de Contracción, si el Jacobiano $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)$ evaluado en esa región es definido uniformemente negativo o equivalentemente que

$$\exists\beta > 0, \qquad \mathbf{J}^T(\boldsymbol{x},t) + \mathbf{J}(\boldsymbol{x},t) \leq -2\beta\mathbf{I} < 0$$

Durante todo el tiempo.

Este resultado puede ser generalizado a través del uso de coordenadas diferenciales generalizadas $\delta \boldsymbol{z}$ dadas por la transformación lineal de la forma

$$\delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x}, t)\delta \boldsymbol{x} \quad (9)$$

con $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x},t)$ como una matriz cuadrada e invertible. Bajo este análisis, adicionalmente es fácil demostrar que un sistema exponencialmente convergente (*i*GUES) requiere de la existencia de una métrica $\mathbf{M}(\boldsymbol{x},t)$ acotada y uniformemente positiva que señale su comportamiento contractivo (6, 7, 10). Esto conduce al siguiente teorema de estabilidad:

Teorema 1 (*iGUES*) (10): *Dado el sistema dinámico (1), es iGUES sí y sólo si el espacio de estados entero es una región de contracción*.

Otras formas de estabilidad pueden ser similarmente definidas y establecidas, a partir de estrategias derivadas, como por ejemplo, definiendo regiones de comportamientos alternos (7), haciendo uso de herramientas matemáticas complementarias como el lema de Barbalat (7, 22), o mediante análisis matemáticos más rigurosos (4, 21).

B. Estabilidad No Incremental

La teoría de contracción puede ser igualmente empleada para estudiar la estabilidad convencional no incremental basada en Lyapunov (1-3). Inicialmente note de la Definición 3, que si un sistema es *i*GUES entonces debe ser GUES puesto que cualquier trayectoria particular de éste último es exponencialmente convergente dada la *i*GUES. Es decir, si todas las trayectorias convergen exponencialmente entre si entonces la trayectoria solución convergerá a una trayectoria límite $\boldsymbol{x}_d$ (t) elegida. Esto puede formalizarse como:

Teorema 2 (GUES): *Dado el sistema dinámico (1), la trayectoria $\boldsymbol{x}_d(t)$ es globalmente exponencialmente estable (GUES), si (1) es globalmente incrementalmente exponencialmente estable (iGUES) o equivalentemente si el espacio de estados completo es una Región de Contracción.*

Demostración: Derivado trivialmente del Teorema 1, y el teorema 2 en (7).

Una metodología alternativa, puede darse empleando el paradigma de *Sistema Virtual/Real* (23) derivado de una extensión simple del concepto de contracción conocido como *Contracción Parcial* (24-26).

CONCLUSIONES

Por supuesto lo primero a notar, es que antes que la teoría de contracción el marco incremental brindado por la norma incremental brinda convenientes características metodológicas. Es precisamente este marco, el que le permite a la teoría de contracción operar tan efectivamente en la solución de problemas de estabilidad dentro del contexto lineal. El marco diferencial en adición por su parte, le otorga a la teoría de contracción la capacidad de operar de manera exacta y analítica; algo extremadamente provechoso aunque poco conveniente al momento de querer obtener alguna ley de control finita por integración del resultado diferencial.

Contrario a lo que podría pensarse, aunque la estabilidad incremental es sumamente robusta debido a su independencia dinámica en relación a las condiciones iniciales, su análisis dado a través de la teoría de contracción resulta relativamente sencillo de realizar tomando en cuenta la metodología lineal de trabajo.

A diferencia de la teoría de Lyapunov la contracción en efecto, generaliza el tratamiento de la estabilidad a través de su uso de coordenadas generalizadas y sistematiza el proceso de análisis de la estabilidad a través de su proceso analítico. A pesar de todos estos atributos mencionados, el análisis de contracción todavía cuenta aún con un conjunto de carencias que la hacen una herramienta inapropiada para analizar clases particulares dinámicas. Ya que la teoría de contracción se fundamente sobre el estudio de la estabilidad incremental de trayectorias, se dificulta el estudio de la estabilidad convencional hacia trayectorias particulares. Si bien es cierto que la estabilidad incremental de la contracción implica la estabilidad convencional, el hecho de que el sistema no resulte incrementalmente estable en algún sentido de la contracción, no implica que no sea estable convencionalmente para una trayectoria particular de interés, y mucho menos que no posea otro tipo de propiedad de estabilidad asociada. La contracción parcial es útil para resolver en parte este problema, sin embargo, es dificultosa la labor. Sistemas dinámicos como los mecánicos subsanan fácilmente este problema debido a sus propiedades físicas.

Rev. Invest. Univ. Quindío.(Col.), 23(1): 48-55; 2012

BIBLIOGRAFÍA

1. Vidyasagar M. Nonlinear Systems Analysis. 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall; 1993.
2. Khalil HK. Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall; 2002.
3. Slotine JJE, Li W. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall; 1991.
4. Jouffroy J. Stabilité et Systèmes Non Linéaires: Réflexions sur l'Analyse de Contraction. Savoie: L'Université de Savoie; 2002.
5. Zamora JM. Estudio del Análisis de Contracción para la Aplicación en el Control de Sistemas Dinámicos No Lineales. Caso de Estudio: Ducted Dan MAV Simplificado [B.Eng. Dissertation]. Armenia: Universidad del Quindío; 2011.
6. Lohmiller W, Slotine J-JE. On Contraction Analysis for Nonlinear Systems. Automatica. 1998;34(6):683-96.
7. Lohmiller WS. Contraction Analysis of Nonlinear Systems [Ph D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology; 1999.
8. Angeli D. A Lyapunov Approach to Incremental Stability Properties. IEEE Transactions on Automatic Control. 2002;47(3):410-21.
9. Fromion V, Monaco S, Normand-Cyrot D. Asymptotic Properties of Incrementally Stable Systems. IEEE Transactions on Automatic Control. 1996;41(5):721-3.
10. Jouffroy J, Fossen TI. A Tutorial on Incremental Stability Analysis Using Contraction Theory. Modeling, Identification and Control. 2010;31(1):1-14.
11. Lohmiller WS, Slotine J-JE, editors. On Metric Observers for Nonlinear Systems. Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications; 1996 September 1996; Dearborn, Michigan.
12. Lohmiller WS, Slotine J-JE, editors. On Metric Controllers and Observers for Nonlinear Systems. Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control; 1996 December 1996; Kobe, Japan.
13. Aris R. Vectors, Tensors, and the Basic Equations of fluid Mechanics. Dover ed. New York: Dover Publications; 1989.
14. Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. IEEE Transactions on Automatic Control. 1981;26(2):301-20.
15. Fromion V, Normand-Cyrot D, Monaco S, editors. A Possible Extension of H∞ Control to the Nonlinear Context. Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control; 1995 13-15 December 1995 New Orleans, Los Angeles.
16. Fromion V. Some Results on the Behavior of Lipschitz Continuous Sytems. Roma, Italia: Universita di Roma "La Sapienza"; 1997.
17. Fromion V, Monaco S, Normand-Cyrot D. A Link Between Input-Output Stability and Lyapunov Stability. Systems & Control Letters. 1996;27:243-8.
18. Jouffroy J, editor. A Simple Extension of Contraction Theory to Study Incremental Stability Properties. European Control Conference; 2003.
19. Naidu DS. Optimal Control Systems. Boca Raton, Fla.: CRC Press; 2003.
20. Ray S, Shananna J. Virtual Displacements in Lagragian Dynamics. arXiv:physics/0410123v1; 2004. p. 8.
21. Jouffroy J, editor. A Relaxed Criterion for Contraction Theory: Application to an Underwater Vehicle Observer. European Control Conference; 2003.
22. Lohmiller WS, Slotine J-JE, editors. Applications of Contraction Analysis. Proceeding of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications; 1997 October 5-7 1997; Hartford, Connecticut.
23. Jouffroy J, Slotine J-JE, editors. Methodological Remarks on Contraction Theory. IEEE Conference on Decision and Control; 2004; Paradise Island, Bahamas.
24. Slotine JJE, Wang W, Rifai KE. Contraction Analysis of Synchronization in Networks of Nonlinearly Coupled Oscillators. In Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems2004.
25. Slotine J-J, Wang W. A Study of Synchronization and Group Cooperation Using Partial Contraction Theory. In: Kumar V, Leonard N, Morse A, editors. Cooperative Control: Springer Berlin / Heidelberg; 2005. p. 443-6.
26. Wang W. Contraction and Partial Contraction: A Study of Synchronization in Nonlinear Networks [Ph D]: Massachusetts Institute of Technology; 2005.